Elementi di Geometria Euclidea
I.S.I.S.Gaetano Filangieri

Frontespizio di un'edizione degli Elementi risalente al XVI secolo in cui il matematico alessandrino è confuso con Euclide di Megara

Un frammento di papiro contenente alcuni elementi della geometria di Euclide

Una rappresentazione di Euclide di [Raffaello Sanzio] nella Scuola di Atene del [1509].

Euclide

In questa prima dispensa relativa alla geometria Euclidea, verranno trattati i fondamenti relativi allo studio della disciplina. Si precisa che il presente lavoro non vuole in alcun modo sostituire i testi di geometria in uso,ma si prefigge solamente di fornire un aiuto agli studenti che affrontano lo studio di questa parte della matematica.

Indice

1.Cenni storici

Euclide (323 a.C.–285 a.C.) è stato un matematico greco antico, che visse molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C.ca.-283 a.C.). È stato sicuramente il più importante matematico della storia antica, e uno dei più importanti e riconosciuti di ogni tempo e luogo. Euclide è noto soprattutto come autore degli Elementi, la più importante opera di geometria dell'antichità; tuttavia di lui si sa pochissimo. Euclide è menzionato in un brano di Pappo, ma la testimonianza più importante su cui si basa la storiografia che lo riguarda viene da Proclo, che lo colloca tra i più giovani discepoli di Platone.
Particolarmente significativa è la circostanza che lo accosta a Tolomeo I, perché ci induce a collocarne l'attività principale all'inizio del III secolo a.C. e ci fa supporre che Tolomeo lo abbia chiamato ad operare nella Biblioteca di Alessandria e nell'annesso Museo.
Controversa è invece la notizia secondo cui sarebbe stato un platonico convinto. Oggi prevale anzi la tendenza a considerare questo giudizio come privo di fondamento e dettato verosimilmente dal desiderio di Proclo di annettere il più grande matematico dell'antichità alla schiera dei neoplatonici a cui lo stesso Proclo apparteneva.

Storicità

La scarsità delle informazioni sulla vita di Euclide (e sulla data incerta della sua nascita - dubbia tra IV e III secolo) fece nascere diverse tradizioni più o meno leggendarie sulla sua identità. In particolare da fonti arabe derivò una credenza che lo voleva nato a Tyro. Nel Medioevo, e fino al Rinascimento, fu invece confuso con Euclide di Megara, un matematico vissuto molto tempo prima e di cui si ha notizia perché menzionato da Platone come seguace di Socrate. È per ciò che in diverse edizioni degli Elementi pubblicate in età rinascimentale l'autore viene indicato come "Euclides Megarensis", con l'aggiunta talvolta di una qualificazione di filosofo socratico.
In tempi più recenti fu messa perfino in dubbio l'effettiva esistenza di un'unica persona di nome Euclide che abbia scritto tutte le opere a lui attribuite. In particolare, le ipotesi formulate si possono così riassumere:

1. Euclide fu un personaggio storico che scrisse gli Elementi e le altre opere a lui attribuite.
2. Euclide fu il capo di un'équipe di matematici che lavoravano ad Alessandria. Tutti contribuirono a scrivere le 'Opere Complete di Euclide', continuando a scrivere opere a suo nome anche dopo la sua morte.
3. Euclide non fu un personaggio storico. Le 'Opere Complete di Euclide' furono scritte da un'equipe di matematici che lavoravano ad Alessandria assumendo come pseudonimo il nome di Euclide di Megara, vissuto un secolo prima.

I sostenitori di quest'ultima ipotesi hanno invocato l'analogia con quanto avvenuto nel Novecento con la riscrittura in forma rinnovata di tutto il corpus matematico da parte di una pluralità di matematici che si celavano sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki.
A sostegno invece della effettiva esistenza di Euclide vi è una lunga tradizione mai messa in dubbio in oltre venti secoli, oltre alle citazioni da parte di autori a lui vicini (Archimede, Erone di Alessandria, ed altri) e circostanze abbastanza attendibili come quella che Apollonio "...trascorse molto tempo ad Alessandria con i seguaci di Euclide".
Alcune delle sue opere sono state perdute come i Porismi, paralogismi, un trattato sulle coniche e uno scritto sui luoghi superficiali. Le opere ritrovate, come i Dati, i Fenomeni e l'Ottica, sono state riscritte e tradotte. I metodi da lui usati sono:

- analisi e sintesi
- riduzione all'assurdo
- esaustione
- determinazione
- riduzione

I principi di matematica superiore ideati da Euclide furono poi ripresi e sviluppati da Archimede, da Apollonio di Perge e, molti secoli più tardi, da Pascal e Descartes (Cartesio).
Studi recenti, basati su informazioni fornite da alcuni storici, hanno proposto come luogo di nascita del matematico a Gela in Sicilia, su tale ipotesi il dibattito rimane comunque aperto.

Visione moderna

Nel 1899 David Hilbert si pone il problema di dare un fondamento assiomatico rigoroso alla geometria, ossia di descrivere la geometria euclidea senza lasciare nessun assioma inespresso. Giunge così a definire 28 assiomi, espressi nel suo lavoro Grundlagen der Geometrie (fondamenti di geometria). Molti di questi assiomi sono assunti implicitamente da Euclide negli Elementi.
Prendendo spunto da Hilbert, e ispirandosi allo spirito di Euclide, il matematico "virtuale" Nicolas Bourbaki, frutto della collaborazione di alcuni dei migliori matematici attivi dal 1935 al 1975, compone la monumentale opera "Elementi di matematica", in 11 volumi e decine di migliaia di pagine, dando una trattazione assiomatica ai vari rami della matematica.

2.Impostazione assiomatica deduttiva

Il metodo assiomatico deduttivo su cui si basa tutta la geometria Euclidea si fonda sui seguenti punti:

Φ si assumono alcuni concetti come primitivi cioè senza darne alcuna definizione

Φ si assumono alcune proposizioni, dette assiomi o postulati, che si decide di accettare come vere senza darne giustificazioni

Φ si definisce ogni nuovo oggetto della teoria mediante precise definizioni che facciano uso solamente dei concetti primitivi o di altre espressioni di cui si sia già stabilito il significato

Φ partendo da proposizioni iniziali assunte come vere, ossia dagli assiomi, dai concetti primitivi e da altre proposizioni già dimostrate, si deducono altre proposizioni dette teoremi attuando quindi un ragionamenti di tipo deduttivo. L'insieme dei ragionamenti che permettono di dedurre a partire dagli assiomi e da altri teoremi, la verità di un teorema si chiama dimostrazione del teorema.

Gli assiomi su cui si fonda il metodo assiomatico deduttivo devono soddisfare ai seguenti tre requisiti:

Φ completezza: l'insieme degli assiomi deve essere completo, deve cioè permettere la

Φ dimostrazione di tutte le proprietà dedotte sperimentalmente

Φ indipendenza: un assioma non può essere dedotto da altri

Φ compatibilità: gli assiomi non devono contraddirsi.

3.Teoremi e corollari

I teoremi sono enunciati la cui verità può essere dimostrata a partire dagli assiomi o da altri teoremi. Una dimostrazione è una sequenza di deduzioni che partendo da affermazioni vere ,**dette ipotesi** ,fanno giungere a una nuova affermazione **detta tesi**. L'enunciato di un teorema può sempre essere scritto nel seguente modo: se p allora q oppure in modo più sintetico $p \rightarrow q$ in cui p è l'ipotesi del teorema mentre q è la tesi del teorema.
Possiamo in modo equivalente scrivere:

- se p allora q
- $p \rightarrow q$
- q è condizione necessaria per p oppure p è condizione sufficiente per q
- p è l'ipotesi, q è la tesi

Dalla implicazione $p \rightarrow q$ possiamo ricavare le seguenti ulteriori implicazioni:

- inversa: $q \rightarrow p$
- contraria: $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$
- controinversa: $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$

Si faccia bene attenzione la fatto che

- se p → q è vera, l'implicazione inversa: q → p non è detto sia vera

Se contemporaneamente sono vere le implicazioni p → q e q → p allora potremmo in modo equivalente affermare che:

- p è condizione necessaria e sufficiente per q
- q è condizione necessaria e sufficiente per p
- p ↔ q

Oltre ai teoremi esistono anche i corollari che non sono altro che teoremi ,sono dirette conseguenze di un assioma o di un altro teorema.

4.I concetti primitivi

Come detto i concetti primitivi sono enti che vengono accettati senza darne alcuna definizione. Essi sono:

- **punto**: viene indicato con una lettera maiuscola dell'alfabeto (A, B, C…)
- **retta**: viene indicata con una lettera minuscola dell'alfabeto (a, b, c…)
- **piano**: viene indicato con una lettera minuscola dell'alfabeto greco (α, β, γ …)

5. Gli assiomi

Come già detto gli assiomi sono delle proposizioni che vengono date e che si decide di accettare come vere senza darne alcuna dimostrazione. Gli assiomi vengono generalmente divisi nei seguenti gruppi:

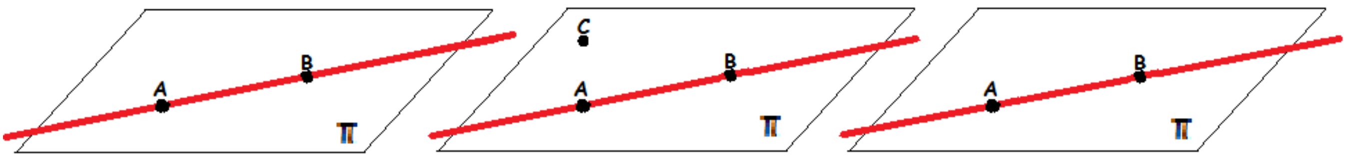
5.1. <u>Assiomi di appartenenza</u> - Stabiliscono delle relazioni tra i punti, le rette e il piano e sono:

A_1: Per ogni coppia di punti A e B di un piano π esiste ed è unica la retta che li contiene

A_2: Data nel piano π una retta r esistono almeno due punti distinti A e B di π che le appartengono e almeno un punto C di π che non le appartiene

A_3: Tre punti non appartenenti alla stessa retta individuano uno e un solo piano

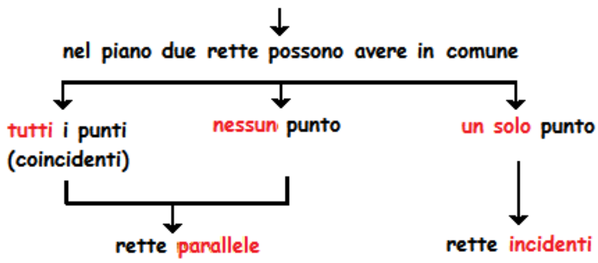
A_4: Se una retta ha due punti in comune con un piano allora appartiene al piano

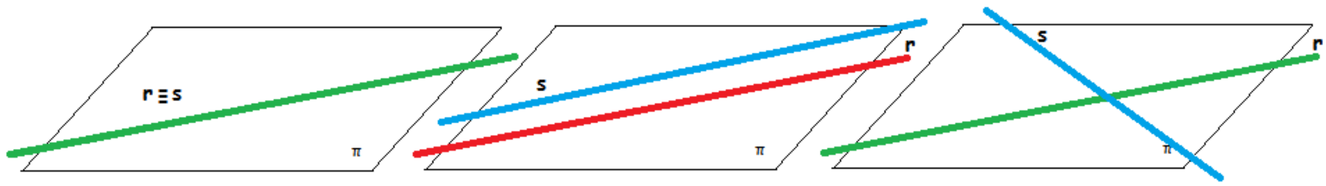


A_1 $\quad$ A_2 e A_3 $\quad$ A_4

5.1.1 Posizione reciproca tra due rette nel piano

Dagli assiomi segue che nel piano due rette distinte hanno al massimo un solo punto in comune





rette coincidenti $\quad$ rette parallele $\quad$ rette incidenti

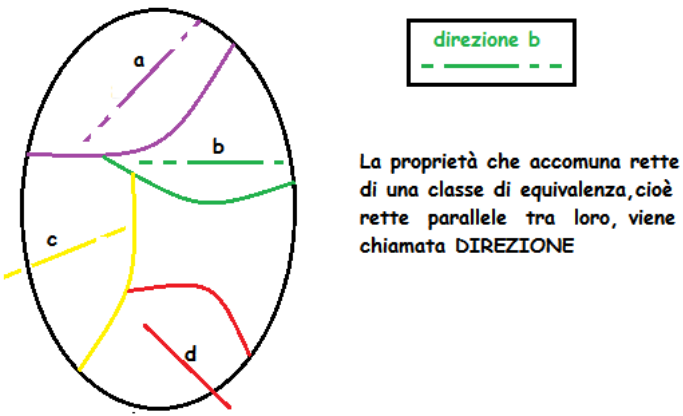
Il parallelismo è una relazione binaria tra rette, ossia è definita su coppie ordinate di rette ed è una relazione di equivalenza:

RIFLESSSIVA – ogni retta è parallela a se stessa

SIMMETRICA – se la retta r è parallela alla retta s, allora anche s è parallela ad r

TRANSITIVA - se la retta r è parallela alla retta s e la retta s è parallela alla retta t, allora anche r è parallela ad t

Le rette del piano vengono suddivise in **classi di equivalenza**,ossia in insiemi formati da rette tra loro parallele



5.2. **Assiomi d'ordine** Stabiliscono un ordinamento tra i punti della retta:

A_5: Nell'insieme dei punti di una retta è possibile stabilire una relazione di ordine totale in modo tale che dati due punti distinti A e B, tali che A precede B, esiste sempre un punto C compreso tra A e B. La retta è un insieme denso.

A_6: Nell'insieme dei punti di una retta è possibile stabilire una relazione di ordine totale in modo tale che dato un punto C, esistono sempre due punti A e B tali che A precede C e C precede B. La retta è un insieme illimitato.

Dati quindi due punti qualsiasi A e B e una retta orientata r si verifica una ed una sola delle seguenti possibilità:

- A coincide con B e scriveremo A=B
- A precede B e scriveremo A<B
- A segue B e scriveremo A>B

5.2.1 **Segmenti e semirette**

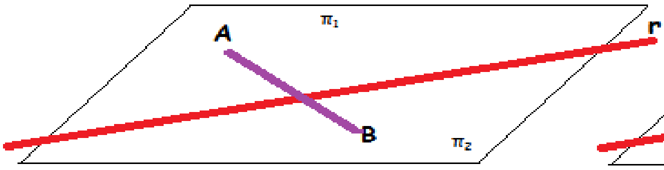
SEGMENTO : Dati i punti A e B sulla retta r,Il SEGMENTO è l'insieme costituito dai punti A, B e da tutti i punti della retta fra A e B (quelli che succedono A e precedono B)

SEMIRETTA : un punto O su una retta la divide in due parti disgiunte, l'una formata da tutti i punti della retta che seguono O, l'altra formata da quelli che precedono O in uno dei due versi; ognuna delle due parti, considerata con o è detta semiretta di origine O

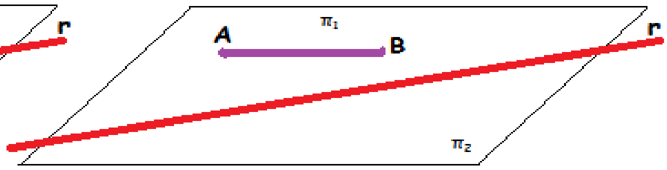
5.3. <u>Assiomi di partizione del piano</u> Servono per poter stabilire una partizione del piano:

A_7: Ogni retta r di un piano π divide il piano stesso in due sottoinsiemi non vuoti π_1 e π_2 tali che se due punti appartengono uno a π_1 e l'altro a π_2 allora il segmento che li unisce interseca la retta r in un punto.

A_8: Ogni retta r di un piano π divide il piano stesso in due sottoinsiemi non vuoti π_1 e π_2 tali che se due punti appartengono entrambi a π_1 o entrambi a π_2 allora il segmento che li unisce non interseca la retta r in alcun punto.

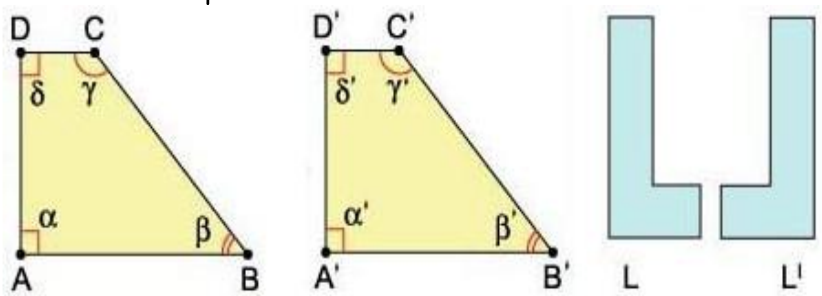


A_7



A_8

5.4 <u>Assiomi di congruenza</u> Due figure si dicono congruenti se con un movimento rigido possono essere sovrapposte punto a punto. Non essendo possibile stabilire matematicamente il concetto di movimento rigido, assumeremo tale concetto come primitivo e quindi assumeremo il concetto di congruenza come un concetto primitivo.



Converremo fin d'ora di indicare due figure congruenti con il simbolo $\cong$

A_9: La relazione di congruenza fra le figure del piano è una relazione di equivalenza, ossia gode della proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva

A_{10}: Tutti i punti sono congruenti tra di loro

A_{11}: Tutte le rette sono congruenti tra di loro

A_{12}: Tutte le semirette sono congruenti tra di loro

A_{13}: Tutti i semipiani sono congruenti tra di loro

A_{14}: tutti i piani sono congruenti tra di loro

A_{15}: Somme e differenze di segmenti congruenti sono congruenti

A_{16}: Somme e differenze di angoli congruenti sono congruenti

A_{17}: Somme e differenze di angoli congruenti sono congruenti

A_{18}:

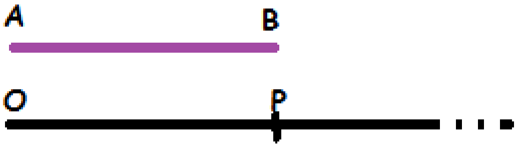
5.5. <u>Assiomi di trasporto</u>

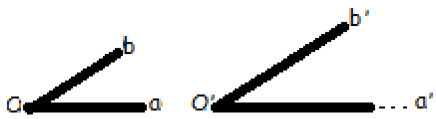
Servono per poter definire il trasporto di segmenti, semirette e angoli:

A_{18} Dato un segmento AB e una semiretta di origine O, esiste un unico punto P sulla semiretta tale che AB sia congruente a OP

A_{19}: Dato un angolo $a\hat{O}b$ e una semiretta a' di origine O', su ognuno dei due semipiani individuati dalla retta a cui appartiene la semiretta a', esiste una unica semiretta b' di origine O' tale che

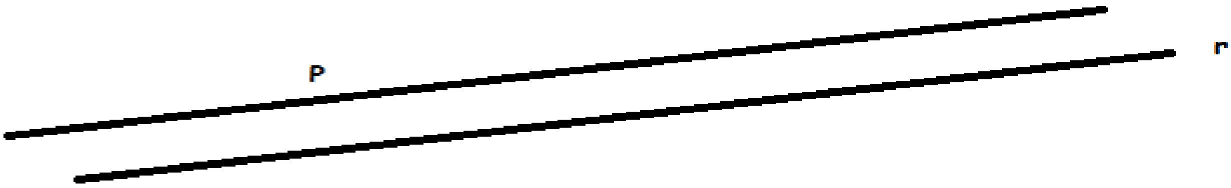
$a\hat{O}b$ sia congruente ad a'O'b'





5.6. <u>Assioma della parallela</u>

A_{20}: Per un punto P non appartenente ad una retta r si può tracciare una unica parallela a r



N.B. L'accettazione o meno di tale assioma da origine alle <u>geometrie non euclidee</u>.

6. <u>Definizioni</u>

Dopo aver introdotto i concetti primitivi e gli assiomi sarà necessario introdurre delle precise definizioni per alcune figure geometriche di particolari importanza.

6.1 <u>Punti</u>

Dicesi :

Φ **figura geometrica** ogni sottoinsieme del piano
Φ **Punti complanari** sono tutti i punti che appartengono ad uno stesso piano
Φ Tre punti appartenenti ad una stessa retta si dicono **allineati**
Φ Due rette che appartengono allo stesso piano si dicono **complanari**
Φ Due rette appartenenti allo stesso piano di dicono **incidenti o secanti** se hanno un solo punto in comune

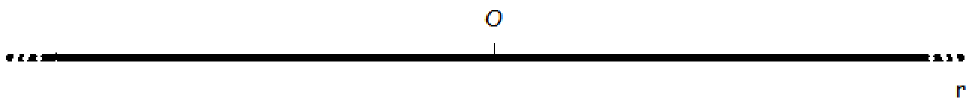
6.2 <u>Retta</u>

Φ Una retta si dice **orientata** quando su di essa è fissato un verso di percorrenza. Se una retta è orientata, dati due punti qualsiasi A e B, si può verificare una e una sola delle seguenti possibilità:
- A coincide con B ossia A=B
- A precede B ossia A<B
- A segue B ossia A>B

Φ Dato un punto O su una retta orientata r, possiamo definire i seguenti sottoinsiemi di r:
- il sottoinsieme costituito dal punto O e da tutti i punti della retta che seguono O
- il sottoinsieme costituito dal punto O e da tutti i punti della retta che precedono O

ciascuno di questi due sottoinsiemi prende il nome di **semiretta di origine *O***

Φ Il punto O divide la retta in due semirette. Queste due semirette sono opposte e la retta su cui giacciono si dice **sostegno delle semirette**



Φ Le semirette si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto, oppure se vogliamo riferirci ad una semiretta di origine O e passante per P scriveremo semiretta OP
Φ Dati due punti A e B su una retta orientata e tali che A precede B, chiameremo segmento AB l'insieme costituito dai punti A e B e da tutti i punti che seguono A e che precedono B
Φ I punti A e B si dicono **estremi del segmento**
Φ I punti del segmento diversi dagli estremi si dicono **interni al segmento**

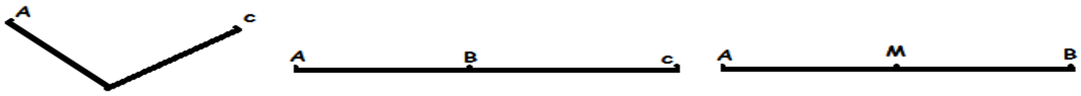
Φ Dato un segmento AB la semiretta di origine B che non contiene A si dice prolungamento di AB dalla parte di B.

Φ Un segmento AB i cui estremi A e B coincidono si chiama **segmento nullo**

Φ Due segmenti che hanno in comune uno e un solo estremo si dicono **consecutivi**

Φ Due segmenti che sono consecutivi e appartengono alla stessa retta si dicono **adiacenti**

Φ Si chiama **punto medio** di un segmento il punto che divide il segmento stesso in due parti congruenti.



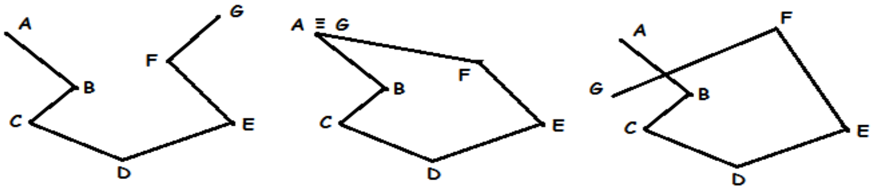
6.3 <u>Poligonale</u>

Φ Si chiama **poligonale** la figura formata da una successione ordinata di un numero finito di segmenti, tali che il primo è consecutivo ma non adiacente al secondo, il secondo è consecutivo ma non adiacente al terzo e così via. Tali segmenti si dicono **lati della poligonale** e i loro estremi **vertici della poligonale**

Φ Diremo **primo estremo** di una poligonale l'estremo del primo segmento che non è in comune con il secondo segmento. Diremo **ultimo estremo** di una poligonale, l'estremo dell'ultimo segmento che non è in comune con il penultimo.

Φ Se il primo e l'ultimo estremo della poligonale coincidono, la poligonale si dice **chiusa**, altrimenti si dice **aperta**

Φ Se due lati non consecutivi di una poligonale hanno un punto in comune, la poligonale si dice **intrecciata**



Spezzata aperta — Spezzata chiusa — Spezzata intrecciata

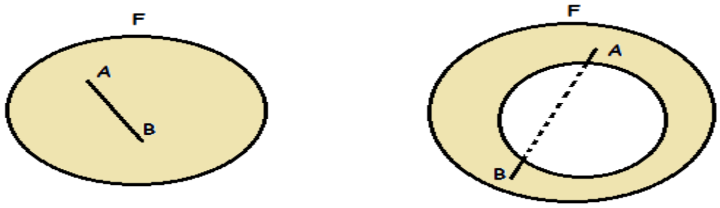
I punti A B C D E F G si chiamano **vertici**

AB, BC, CD, DE, EF e FG si dico **lati**

Φ Una figura geometrica F si dice <u>**convessa**</u> se, <u>comunque scelti due punti A,B appartenenti alla figura stessa, il segmento AB è tutto contenuto in F</u>.

Φ Una figura non convessa si dice **concava**

N.B <u>Si noti che le rette, le semirette e i segmenti sono figure convesse.</u>

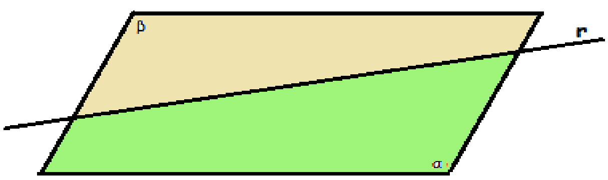


Convessa — Concava

6.4 <u>Semipiani</u>

Φ Si dice **semipiano** l'insieme costituito dall'unione della retta r con uno dei due sottoinsiemi α o β generati dalla retta r stessa. la retta r si dice **origine o frontiera** del semipiano.

Φ Si dicono **punti interni** a un semipiano quelli che appartengono al semipiano ma non alla sua origine.



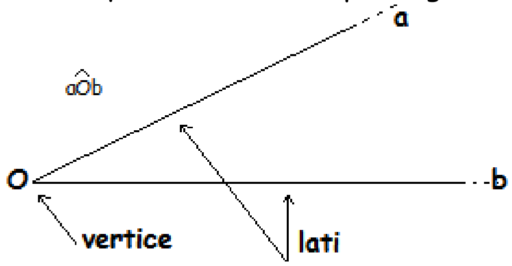
6.5 Angolo

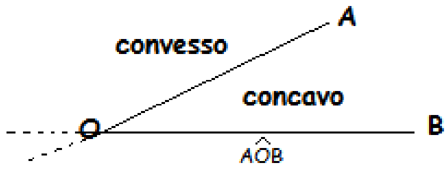
Consideriamo in un piano due semirette aventi la stessa origine. L'insieme dei punti del piano che non appartengono alle semirette viene suddiviso dalle semirette in due sottoinsiemi disgiunti:

- chiamiamo **angolo** l'unione di ciascuno di questi due sottoinsiemi con le semirette stesse.
- L'origine delle due semirette si chiama **vertice** dell'angolo e le due semirette si chiamano **lati** dell'angolo.

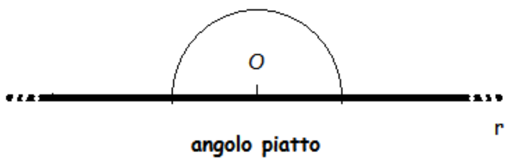
N.B. I due angoli così formati sono uno concavo e l'altro convesso. Inoltre si converrà di indicare: l'angolo di vertice O avente come lati le semirette a e b con il simbolo $\widehat{ab}$ o $a\hat{O}b$. L'angolo di vertice O i cui lati passano uno per il punto A e l'altro per il punto B con il simbolo $A\hat{O}B$

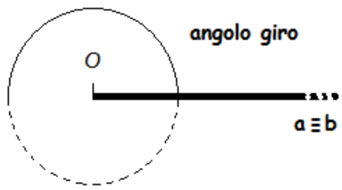
L'angolo è convesso quando contiene i prolungamenti dei suoi lati



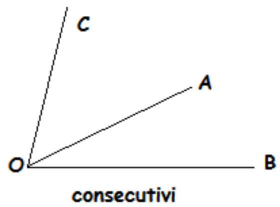


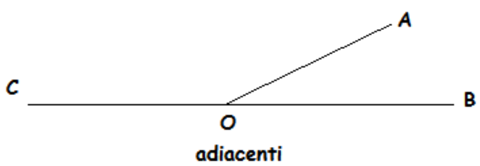
- Si chiama **angolo piatto** ogni angolo che ha come lati una coppia di semirette opposte
- Si chiama **angolo giro** ogni angolo che ha come lati due semirette coincidenti e che coincide con l'intero piano
- Si chiama angolo nullo ogni angolo che ha come lati due semirette coincidenti e che non contiene altri punti oltre a quelli dei suoi lati.





- Due angoli si dicono **consecutivi** se hanno lo stesso vertice e se hanno in comune soltanto i punti di un lato
- ue angoli si dicono **adiacenti** se oltre ad essere consecutivi hanno i lati non comuni appartenenti alla stessa retta





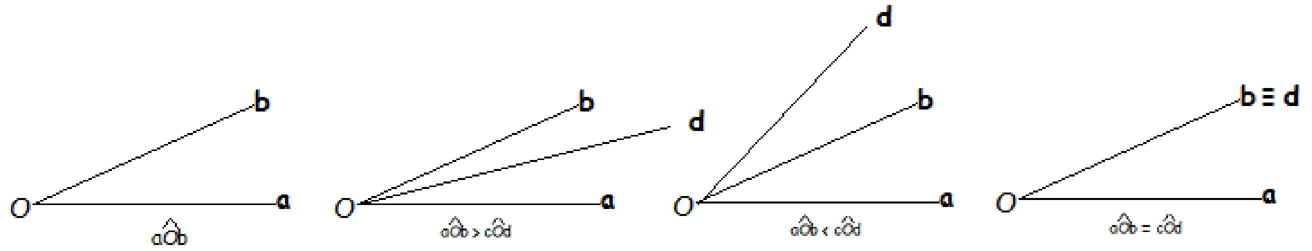
- Si dice **bisettrice** di un angolo la semiretta, avente origine nel vertice dell'angolo che lo divide in due angoli congruenti
- Due angoli si dicono **opposti al vertice** se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro
- Nell'angolo piatto la sua bisettrice lo divide in due angoli congruenti ognuno dei quali è definito **angolo retto**

Confronto tra angoli

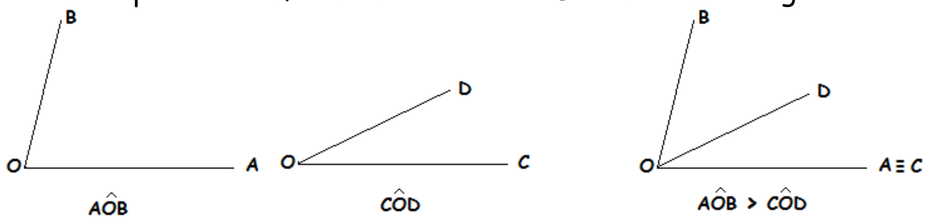
Consideriamo due angoli $a\hat{O}b$ e $c\hat{O}d$. In base all'assioma del trasporto degli angoli, nel semipiano contenente la semiretta b e avente come origine la retta su cui giace la semiretta a, esiste ed è unica la semiretta d, di origine O,tale che $a\hat{O}b = c\hat{O}d$..Il confronto tra angoli si può allora definire in base alla posizione in cui cade la semiretta rispetto all'angolo $a\hat{O}b$:

- se la semiretta d cade internamente all'angolo $a\hat{O}b$, diremo che $a\hat{O}b > c\hat{O}d$

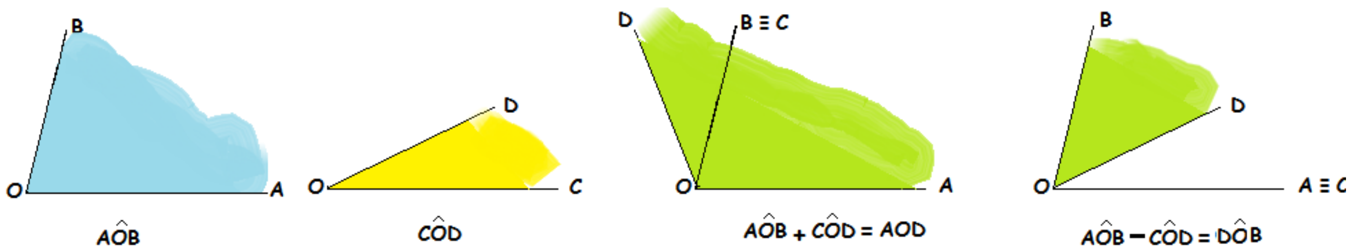
- se la semiretta d cade esternamente all'angolo $a\hat{O}b$, diremo che $a\hat{O}b < c\hat{O}d$
- se la semiretta d coincide con la semiretta Od, diremo che $a\hat{O}b = c\hat{O}d$



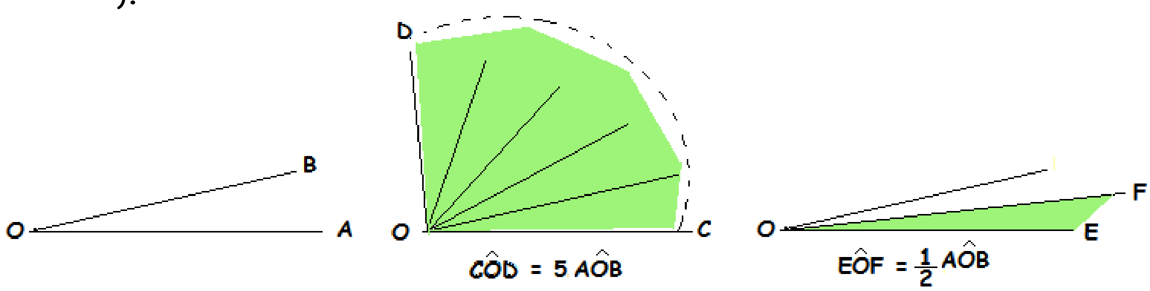
- Un angolo minore di un angolo retto si dice **acuto**
- Un angolo maggiore dell'angolo retto è detto angolo **ottuso**
- L'angolo $A\hat{O}B > C\hat{O}D$ perché confrontandoli il lato **OD** è interno all'angolo $A\hat{O}B$



<u>Operazioni con gli angoli</u>



- La **somma** di due angoli si ottiene facendo coincidere il lato OB del primo con il lato OD del secondo (devono considerarli consecutivi).
- La **differenza** si ottiene facendo coincidere il lato OA del primo con il lato OC del secondo.
- il **multiplo** di un angolo, **secondo il numero n>1**, si ottiene sommando n volte l'angolo dato ($C\hat{O}D = 5\,A\hat{O}B$)
- **Il multiplo, secondo il numero 1/n,** si ottiene dividendo l'angolo dato in n parti congruenti ($E\hat{O}F = \frac{1}{2}A\hat{O}B$).



- Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è congruente ad un angolo retto
- Due angoli di dicono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto

6.6 <u>Poligoni</u>

Consideriamo una poligonale chiusa e non intrecciata in cui ogni vertice appartiene esattamente a due lati della poligonale.

- Chiameremo **poligono** la regione di piano formata dalla poligonale e dai punti al suo interno.

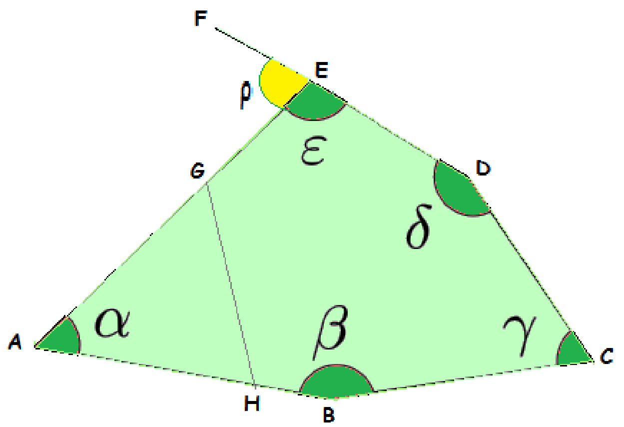
- I vertici e i lati della poligonale si chiamano **vertici e lati** del poligono. La poligonale si dice anche **contorno o frontiera** del poligono

I poligoni con

- tre lati si chiamano **triangoli**
- quattro lati si chiamano **quadrilateri** ρ
- cinque lati si chiamano **pentagoni**
- sei lati si chiamano **esagoni**
- sette lati si chiamano **ettagoni**
- otto lati si chiamano **ottagoni**
- nove lati si chiamano **ennagoni**
- dieci lati si chiamano **decagoni**
- Un poligono prende il nome di **diagonale** ogni segmento che congiunge due suoi vertici non consecutivi

Dato un poligono chiameremo **corda** (**GH**) ogni segmento che congiunge due punti del contorno del poligono stesso appartenenti a lati distinti

Dato un poligono chiameremo **angolo interno** (α, β, γ, δ, ε)ogni angolo individuato da due lati consecutivi del poligono e dal vertice in comune. Chiameremo **angolo esterno** ogni angolo adiacente ad un angolo interno (ρ)



6.7 <u>Confronto tra segmenti</u>

Consideriamo due segmenti AB e CD. In base all'assioma del trasporto dei segmenti, sulla semiretta di origine A che contiene B esiste un unico punto P tale che AP ≅ CD.

Il confronto tra segmenti si può allora definire in base alla posizione in cui cade P rispetto ad AB:

se il punto P cade esternamente al segmento AB, diremo che AB < AP≅ CD

se il punto P coincide con il punto B allora AB ≅ AP≅ CD

se il punto P cade internamente al segmento AB, diremo che AB > AP≅ CD

<u>**Operazioni tra segmenti**</u>

- Diciamo **somma** di due segmenti il segmento somma di due segmenti rispettivamente congruenti a quelli dati e adiacenti tra di loro
- Diciamo **differenza** di due segmenti AB e BC, con AB>CD, il segmento che addizionato a CD dà come somma AB
- Un segmento AB si dice **multiplo** di CD secondo un numero naturale n > 1 se è congruente alla somma di n segmenti congruenti a CD